数理解析研究所講究録
592巻 1986年 59-75



# Super Grassmann hierarchy と super KP hierarchy

横浜市大・文理　上野喜三雄
(Kimio Ueno)
広島大・理　山田裕史
(Hirofumi Yamada)

## 0. Introduction

佐藤幹夫氏により導入された Kadomtsev - Petviashvili (KP) hierarchy は，無限次元 Grassmann 多様体上の力学系として自然に解釈された ([0, 1])。その線型化方程式（佐藤方程式）は線型常微分作用素の積への分解という素朴な問題の“時間発展”を記述するものとしてとらえることができる。この framework に従い我々は KP hierarchy の超対称化 (supersymmetric extension) を考えてみることにした。

そもそも超対称化とは物理学の統一場理論に端を発する概念である。通常の時空座標の他に Grassmann 数をも座標として許し，field（函数）も Grassmann 代数値として，Bose 場，Fermi 場を同時に記述しようという formalism である。また数学においても，70年代から主にソ連の人々により，リー

超代数，超多様体などが研究されてきている。この辺で，微分方程式の可積分系の超対称化を考えてみるのも無駄ではなかろう。

## 1. Grassmann hierarchy と KP hierarchy

本節は通常の KP hierarchy の復習にあてられる。ここでは $\mathcal{K}$ を一変数函数体，$\partial_x : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ を derivation，$C$ を定数体とする。$\mathcal{D} = \sum_{n \geq 0}^{\oplus} \mathcal{K} \partial_x^n$ を微分作用素環と呼ぶ。積は Leibniz rule で入れる。$\mathcal{D}(N)^{monic} = \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \partial_x^{N-n} ;\ a_0 = 1 \right\}$ とおく。次の問題を考えよう。「$P \in \mathcal{D}(N)^{monic}$ を $\mathcal{K}$ 上可解とする。すなわち線型微分方程式 $P\phi = 0$ が $\mathcal{K}$ 内に $N$ 個の（$C$ 上）一次独立な解を持つとする。$N = m + n$ としたとき $W = \sum_{j=0}^{m} w_j \partial_x^{m-j} \in \mathcal{D}(m)^{monic}$ をとり

$$P = ZW \qquad (0)$$

と微分作用素の積に分解せよ。」この問題は $\mathcal{D}$-加群 $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ の商 $\mathcal{D}$-加群 $M' = \mathcal{D}/\mathcal{D}W$ を決定せよ，という問題と同等である。そして次の事実がわかる。$V = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{K})$ とおいたとき

$$\{M \text{ の商 } \mathcal{D}\text{-加群}\} \simeq \{V \text{ の } m \text{ 次元線型部分空間}\}。$$

これは純粋に線型微分方程式の問題であるが (0) を $w_1, \dots, w_m$ に関する非線型微分方程式と見れば，

非線型微分方程式 (0) の解空間 $\cong GM(m, V)$ を意味する。

この辺の事情をもう少しくわしく見てみよう。簡単の為, $P = \partial_x^N$ とする。$P\phi = 0$ の解の基本系を $(\phi_0, \cdots, \phi_{N-1})$ とする。$W\psi = 0$ の解の基本系を $(\psi_0, \cdots, \psi_{m-1})$ とすると, $\psi_j = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i \xi_{ij}$ と表わされる。ここで $\xi = (\xi_{ij})_{\substack{0\le i<N \\ 0\le j<m}} \in Mat(N, m; \mathbb{C})$, $\operatorname{rank} \xi = m$ である。このような行列 $\xi$ を $N$ 次元, $m$-frame と呼ぶ。今, Wronski 行列 $\Phi = (\phi_j^{(i)})_{0\le i,j<N}$ を考えれば,

$$W\psi_j = 0 \quad (0 \le j < m) \iff (w_m, \cdots, w_1, 1, 0, \cdots, 0)\Phi\xi = 0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

がわかる。(1) を Grassmann 方程式と呼ぶことにしよう。今, 我々は $P$ の分解 (0) から出発して Grassmann 方程式 (1) に到達したのだが, 逆に任意の $N$ 次元, $m$-frame $\xi$ から出発して, (1) を解くことにより, $P$ の右因子 $W$ を求めることもできる。実際, $\det({}^t\xi_0 \Phi \xi) \ne 0$ (ただし ${}^t\xi_0 = [\, I_m \,\vdots\, O_{m,n} \,]$) より (1) は一意解 $w_1, \cdots, w_m$ を持つので $W = \sum_{j=0}^{m} w_j \partial_x^{m-j}$ $(w_0 = 1)$ と置いてやればよい。

次に時間変数 $t_1, t_2, t_3, \cdots$ を導入して $W$ の"時間発展"すなわち変形を考えよう。$P = \partial_x^N$ の場合を例にとれば, Wronski 行列 $\Phi$ は $\partial_x \Phi = \Lambda_N \Phi$ $\left( \Lambda_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right)$ を満たすことに鑑みて, $\Phi$ の時間発展を $\partial_{t_\ell} \Phi = \Lambda_N^\ell \Phi$ により与えてやる。

このような$\Psi$に対して(1)を考える。その結果得られる$w_1, \cdots, w_m$に対する非線型微分方程式を"Grassmann hierarchy"と呼ぶ。今、その解に対して微分作用素$W$をつくると$W\psi_k = 0$ $(0 \le k < m)$を満たす。ここで$(\psi_0, \cdots, \psi_{m-1})$は行列$\Psi$の第0行目である。この式を$t_\ell$で微分する。

$$\frac{\partial W}{\partial t_\ell}\psi_k + W\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t_\ell}\right) = 0 \qquad (0 \le k < m) .$$

ところが時間発展の入れ方より明らかに$\frac{\partial \psi_k}{\partial t_\ell} = \frac{\partial^\ell \psi_k}{\partial x^\ell}$であるから、

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_\ell} + W\partial_x^\ell\right)\psi_k = 0 .$$

ここに現れる微分作用素を$\frac{\partial W}{\partial t_\ell} + W\partial_x^\ell = B_\ell W + R_\ell$と割り算する。$B_\ell \in \mathcal{D}(\ell)^{monic}$, $\mathrm{ord}\, R_\ell < m$である。すると、

$$(B_\ell W + R_\ell)\psi_k = 0$$

であるから$R_\ell \psi_k = 0$。これは$R_\ell = 0$を意味する。よって

$$\frac{\partial W}{\partial t_\ell} = B_\ell W - W\partial_x^\ell \qquad (2)$$

が得られる。右から$W^{-1}$という擬微分作用素をかけると、

$$B_\ell = W\partial_x^\ell W^{-1} + \frac{\partial W}{\partial t_\ell}W^{-1} .$$

ところが$\mathrm{ord}\left(\frac{\partial W}{\partial t_\ell}\right)W^{-1} < 0$であるので、結局

$$B_\ell = (W\partial_x^\ell W^{-1})_+ \quad (= W\partial_x^\ell W^{-1}\text{の微分作用素部分}) \qquad (3)$$

である。$W$の時間発展は(2),(3)で与えられたわけだが、これはKP hierarchyの佐藤方程式そのものである。KP hierarchyは無限次元Grassmann多様体上の運動としてとらえられるが、Grassmann hierarchyは、その有限次元軌道に対応しているので

ある。また Grassmann hierarchy の適当な極限 $m, n \mapsto \infty$ をとれば KP hierarchy が得られる。

少し例を挙げよう。$W = \partial_x + w \in \mathcal{D}(1)^{monic}$ とする。$B_\ell$ を (3) に従って求めてみると、

$$B_1 = \partial_x, \quad B_2 = \partial_x^2 - 2w_x, \qquad \left( w_x = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ 等} \right)$$
$$B_3 = \partial_x^3 - 3w_x\partial_x - 3w_{xx} + 3ww_x,$$

となる。(2) において $\ell = 1$ とおくと、これは $x = t_1$ と同一視してよい事を示している。また $\ell = 2, 3$ とおくことにより、次の方程式が得られる。

$$w_{t_2} = w_{xx} - 2ww_x \qquad (4)$$

$$w_{t_3} = w_{xxx} - 3w_x^2 + 3w^2w_x - 3ww_{xx} \qquad (5)$$

(4) は、Burgers - Hopf 方程式と呼ばれているものである。$u = -w_x$ とおいて (4), (5) を連立させると (本来の) KP 方程式

$$3u_{t_2t_2} + (-4u_{t_3} + u_{xxx} + 12uu_x)_x = 0$$

が出る。

## 2. Super manifold, super Grassmann manifold.

本節では Rogers [2], Boyer - Gitler [3] などに従って super manifold に関する事項を述べる。まず $L$ を正整数とし、$B_L$ を $\mathbb{R}^L$ 上の Grassmann 代数とする。

$$B_L = \Lambda(\mathbb{R}^L) = B_{L,0} \oplus B_{L,1},$$

ここで $B_{L,0}$ (resp. $B_{L,1}$) は偶数個 (resp. 奇数個) の元の外積で書かれている元の全体を表し、$B_L$ の even part (resp. odd part) と呼ばれる。$B_L$ の位相は $\mathbb{R}^L$ から自然に導入されるものとする。

$L = \infty$ の場合も同様に定義できる。

$$l_1 = \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots ) \in \mathbb{R}^\infty ; \sum_{i \geq 0} |\alpha_i| < \infty \right\}$$

とおき、$B_\infty = \Lambda(l_1) = B_{\infty,0} \oplus B_{\infty,1}$ とする。次に、

$$B_L^{m/n} = (B_{L,0})^m \oplus (B_{L,1})^n$$

とおく。この空間が我々の舞台である。

微分可能函数は次のように定義される。$U \subset B_L^{m/n}$ を open set とする。連続函数 $f : U \to B_L$ が "$G^1$-級" であるとは、$m+n$ 個の連続函数 $G_k f : U \to B_L$ $(0 \leq k < m+n)$ と、$\eta : B_L^{m/n} \to B_L$ が存在して、

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=0}^{m+n-1} h^k (G_k f)(x) + \eta(h) \|h\|$$

$$\|\eta(h)\| \to 0 \quad \text{as} \quad \|h\| \to 0$$

ただし、$x = (x^0, \cdots, x^{m+n-1}) \in U$, $h = (h^0, \cdots, h^{m+n-1}) \in B_L^{m/n}$
$\begin{cases} (x^0, \cdots, x^{m-1}) \in (B_{L,0})^m \\ (x^m, \cdots, x^{m+n-1}) \in (B_{L,1})^n \end{cases}$

を満たすこと、と定義する。また $f$ が $G^r$-級とは、$G_k f$ $(0 \leq k < m+n)$ が $G^{r-1}$-級と定義する。もちろん、$G^\infty$-級というのも当り前に定義される。ここで $L$ が有限のとき、$m \leq k < m+n$ なる $k$ については $G_k f$ のとり方は一意的ではないことに注意せねばならない。この部分をきちんと定式化するには、Boyer - Gitler [3] の、

ように最高次数の部分による modulo class で考えなければいけないが、我々にとって今必要なところは、$L=\infty$ としてよいので、とりあえず微分可能性の定義は上のままにしておく。なお上記 [3] では、$G^\infty$-級函数を実函数としての偏微分で特徴付ける、丁度 Cauchy-Riemann 方程式にあたるものも考察されている。もう一つだけ言葉の準備をしておく。自然な射影 $\epsilon: B_L \longrightarrow \mathbb{R}$, $\epsilon: B_L^{m|n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を"肉体写像 (body map)"といい、$s = 1-\epsilon$ を"精神写像 (soul map)"と呼ぶ。これは DeWitt による用語である。

さて $(m|n)$-次元 $G^\infty$-supermanifold over $B_L$ とは通常の $C^\infty$-多様体のときと同様に、Hausdorff 空間、局所的に $B_L^{m|n}$ の open set と同相で、それを $G^\infty$-級写像で patching したものとして定義される。Rogers は [2] で $(1|1)$-次元 $G^\infty$-supermanifold over $B_1$ の例として 2次元 torus $T^2$ を挙げている。ここでは別の例を挙げよう。

$$\mathrm{Mat}(m|n\,;B_L) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array}\right] ; \begin{array}{l} A_{00}: m\times m,\ B_{L,0}\text{値},\ A_{01}: m\times n,\ B_{L,1}\text{値} \\ A_{10}: n\times m,\ B_{L,1}\text{値},\ A_{11}: n\times n,\ B_{L,0}\text{値} \end{array} \right\}$$

とおく。$\mathrm{Mat}(m|n;B_L)$ は Lie superalgebra の例になっているが、この中の可逆元の全体を $GL(m|n;B_L)$ と書く。$\left[\begin{array}{c|c} A_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array}\right]$ が可逆であることは、$\epsilon(A_{00}) \in GL(m;\mathbb{R})$, $\epsilon(A_{11}) \in GL(n;\mathbb{R})$ ということと同値である。$GL(m|n;B_L)$ は $G^\infty$-supermanifold のみならず

Lie supergroup の例にもなっている。

次に Grassmann 多様体の super 版を考える。通常の Grassmann 多様体をもう一度思い出そう。$N$ 次元, $m$-frame の全体を $FR(N, m; C)$ で表わす。$FR(N, m; C)$ を $GL(m; C)$ による右からの作用で割ったもの,

$$GM(m, n) = FR(N, m; C) / GL(m; C) \qquad (m+n=N)$$

が Grassmann 多様体であった。これは $mn$ 次元の $C^\infty$-多様体 (over $C$) である。この方法をそのまま super 化する。

$$SFR(M|N, m|n; B_L)$$
$$= \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} \xi_{00} & \xi_{01} \\ \hline \xi_{10} & \xi_{11} \end{array} \right] ; \begin{array}{l} \xi_{00} : M\times m,\ B_{L,0}\text{値},\quad \xi_{01} : M\times n,\ B_{L,1}\text{値} \\ \xi_{10} : N\times m,\ B_{L,1}\text{値},\quad \xi_{11} : N\times n,\ B_{L,0}\text{値} \\ \operatorname{rank} \epsilon(\xi_{00}) = m,\quad \operatorname{rank} \epsilon(\xi_{11}) = n \end{array} \right\}$$

とおき、この元を $M|N$-次元, $m|n$-superframe と呼ぶ。

$SFR(M|N, m|n; B_L)$ には右から $GL(m|n; B_L)$ が作用する。

そこで

$$GM(m|n, m'|n'; B_L) = SFR(M|N, m|n; B_L) / GL(m|n; B_L)$$
$$(m+m'=M,\ n+n'=N)$$

とおく。これは, $(mm'+nn' \mid mn'+m'n)$-次元, $G^\infty$-supermanifold over $B_L$ になっていることが確かめられる。

## 3. Super Grassmann hierarchy と super KP hierarchy

本節では第1節で述べた Grassmann hierarchy と KP hierarchy の super化についてその定式化といくつかの解の表示を述べる。まず記号を準備しよう。$x$ を通常の(可換な)変数, $s$ を(反可換な) Grassmann 変数とする。すなわち,(反)交換関係 $[s,s]_+=0$, $[x,s]=0$ が成り立っているものとする。定数の役割を果たす Grassmann 代数を $\mathcal{A}=B_\infty$ としておく。函数体 $\mathcal{K}$ を第1節と同じものとして $\mathcal{S}=(\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}[s])\otimes\mathcal{A}=\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_1$ という superalgebra を考える。$\mathcal{S}$ の元を superfield と呼ぶ。Superfield $f$ は

$$f=f(x,s)=f_{00}+sf_{01}+f_{10}+sf_{11}$$

と表示される。ここで $f_{00},f_{11}\in\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}_0$, $f_{01},f_{10}\in\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}_1$ である。$\mathcal{S}$ 上の微分作用素 $\partial_s$ を

$$\partial_s(f)=f_{01}+f_{11}$$

により定義し,さらに $\Theta$ を $\Theta=\partial_s+s\partial_x$ により定義する。この $\Theta$ は $\partial_x$ の"平方根"である。すなわち,容易にわかるように $\Theta^2=\partial_x$ が成立する。(Supersymmetry とは物理的に言えば時空の translation の平方根をとることである。ここではまず空間の方について,この操作を行ったことになる。) $\Theta$ は odd な微分で super Leibniz rule

$$\Theta f=\dot{\Theta}f+f^*\Theta$$

をみたす。ただし上で

$$f^* = f_{00} + s f_{01} - f_{10} - s f_{11}$$

であり，$\dot{\Theta} f$ は "$f$ に $\Theta$ を作用させた superfield"，すなわち，

$$\dot{\Theta} f = f_{01} + s\frac{\partial f_{00}}{\partial x} + f_{11} + s\frac{\partial f_{10}}{\partial x}$$

をあらわす。微分作用素環の役割を果たすのは，当然 $\mathcal{S}[\Theta]$ である。これは super Leibniz rule により，superalgebra になっている。「$P \in \mathcal{S}[\Theta](N)^{monic}$ を $P = ZW$，$W \in \mathcal{S}[\Theta](m)^{monic}$ と分解せよ」という問題を考える。簡単の為，$N$，$m$ を偶数，$P = \Theta^N$ として くわしく見ていこう。$P\phi = 0$ の解を $\phi_{2j} = x^j/j!$ $(0 \le j \le N/2)$，$\phi_{2j+1} = s x^j/j!$ $(0 \le j < N/2)$ とする $\phi_j \in \mathcal{S}_{|j|}$ $(|j| = j \bmod 2)$ である。Super Wronski 行列を $\Phi = (\dot{\Theta}^i \phi_j)_{0 \le i,j < N}$ により定義する。明らかに $\dot{\Theta}\Phi = \Lambda_N \Phi$ が成立する。$P = ZW$ という分解を求めるには，第1節と同様に次の "super Grassmann 方程式" を解けばよい。

$$(w_m, \cdots, w_1, 1, 0, \cdots, 0)\Phi\xi = 0 \qquad (6)$$

ただし，$\xi = (\xi_{ij}) \in Mat(N, m; A)$，$\mathrm{rank}\,\epsilon(\xi) = m$ であり，$\xi_{ij} \in A_{|i+j|}$ である。行，列を適当に並べかえて，$\check{\xi} \in SFR(N/2|N/2, m/2|m/2; A)$ とすることができるので $\xi$ を superframe と呼んでもよいだろう。行，列を適当に入れかえて，(6) を次のように書くことができる。

$$(w_m, w_{m-2}, \cdots, w_2; w_{m-1}, w_{m-3}, \cdots, w_1)\check{\Phi} = -(\alpha_m, \alpha_{m-2}, \cdots, \alpha_2; \alpha_{m-1}, \alpha_{m-3}, \cdots, \alpha_1) \quad \text{—— (7)}$$

ここで $\check{\Phi}$ は $\Phi = \Phi\xi$ の行列を入れかえたもので

$$\check{\Phi} = \left[\begin{array}{c|c} \check{\Phi}_{00} & \check{\Phi}_{01} \\ \hline \check{\Phi}_{10} & \check{\Phi}_{11} \end{array}\right], \qquad \check{\Phi}_{ij} \text{ の成分 } \in \mathcal{S}_{|i+j|}$$

という形をしている。また $\alpha_j \in \mathcal{S}_{|j|}$ である。(6) (or (7)) はすべてのsuperframe $\xi$ に対して一意可解であり $w_j \in \mathcal{S}_{|j|}$ となる。つまり super Grassmann 方程式 (6) の解全体は super Grassmann 多様体をなす。

次に時間発展を導入する。Evenな時間変数を $t_2, t_4, t_6, \cdots$, とし, oddな時間変数を $s_1, s_3, s_5, \cdots$, とする。変数 $x, s$ とこれらの間には次の(反)交換関係が成立しているものとする。

$$\begin{cases} [x, t_{2l}] = [x, s_{2l+1}] = [s, t_{2l}] = [s, s_{2l+1}]_+ = 0, \\ [t_{2l}, t_{2k}] = [t_{2l}, s_{2l+1}] = [s_{2l+1}, s_{2k+1}]_+ = 0. \end{cases}$$

微分作用素 $\Theta_l$ を

$$\begin{cases} \Theta_{2l} = \partial_{t_{2l}}, \\ \Theta_{2l+1} = \partial_{s_{2l+1}} + \sum_{k \geq 0} s_{2k+1} \partial_{t_{2l+2k+2}} \end{cases}$$

と定義する。これらは次の(反)交換関係を満たす。

$$\begin{cases} [\Theta, \Theta_{2l}] = [\Theta, \Theta_{2l+1}]_+ = 0 \\ [\Theta_{2l}, \Theta_{2k}] = [\Theta_{2l}, \Theta_{2k+1}] = 0 \\ [\Theta_{2l+1}, \Theta_{2k+1}]_+ = 2\Theta_{2l+2k+2} \end{cases}.$$

Wronski行列 $\Phi$ の時間発展を今回は,次で入れる。

$$\dot{\Theta}_l \Phi = \Lambda_N^l \Phi \qquad \text{ただし} \quad \Lambda_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

ここで $\Gamma_N^2 = -\Lambda_N^2$, $[\Gamma_N, \Lambda_N]_+ = 0$ に注意せよ。このような$\Phi$に対して立てた super Grassmann 方程式 (6) から得られる $w_1, \cdots, w_m$ の非線型微分方程式系を "super Grassmann hierarchy" と呼ぶ。第1節と同様に微分作用素の割り算を用いて（今度は符号に充分に気をつけないといけない）次が示される。

<u>Proposition</u>　Super Grassmann 方程式 (6) の解 $w_1, \cdots, w_m$ から擬微分作用素 $W = \sum_{j=0}^{m} w_j \Theta^{-j}$ $(w_0 = 1)$ を作ると $W$ の時間発展は次で与えられる。

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\Theta}_{2l} W = (-)^l \{ B_{2l} W - W \Theta^{2l} \} \\ \dot{\Theta}_{2l+1} W = (-)^{l+m+1} \{ B_{2l+1} W - W \Theta^{2l+1} \} \\ B_l = (W \Theta^l W)_+ . \end{array}\right. \tag{8}$$
//

(8) は super Grassmann hierarchy における佐藤方程式と呼ぶべきものである。これらの積分可能条件は次の Zakharov – Shabat 方程式である。

$$\left\{\begin{array}{l} (-)^l \dot{\Theta}_{2l} B_{2k} - (-)^k \dot{\Theta}_{2k} B_{2l} + [B_{2k}, B_{2l}] = 0 \\ (-)^l \dot{\Theta}_{2l} B_{2k+1} + (-)^{k+m} \dot{\Theta}_{2k+1} B_{2l} + [B_{2k+1}, B_{2l}] = 0 \\ -(-)^{l+m} \dot{\Theta}_{2l+1} B_{2k+1} + (-)^{k+m} \dot{\Theta}_{2l+1} B_{2l+1} - [B_{2k+1}, B_{2l+1}]_+ + 2 B_{2k+2l+2} \\ \qquad = 0 \end{array}\right.$$

$$\cdots\cdots (9)$$

無限サイズ（もちろん意味を明確にしないといけないが）のsuper Grassmann方程式から生ずる $w_j$ 達に対する非線型微分方程式系を"Super KP hierarchy"と呼ぶわけだが上のpropositionからもわかるように これは，$m$ の偶奇によって方程式系が異なる。これは $\mathcal{P}$ と $-\mathcal{P}$ のちがいから来ている。従って odd な時間変数について $s_{2l+1}$ と $-s_{2l+1}$，$\Theta_{2l+1}$ と $-\Theta_{2l+1}$ のちがいに相当する。$m$ が偶数のときを type 0，奇数のときを type I のSKP hierarchy と呼ぶことにする。SKP hierarchy の佐藤方程式，Zakharov-Shabat 方程式は，それぞれ (8)，(9) と同じ形である。

例を少し挙げる。Type 0 の SKP hierarchy を考えよう。$W=\sum_{j\geq 0} w_j \Theta^{-j}$ $(w_0=1)$ において $w_j \in \mathcal{S}_{|j|}$ とする。このとき，計算により

$$B_1 = \Theta + 2w_1, \qquad B_2 = \Theta^2 = \partial_x,$$

$$B_3 = \Theta^3 + 2w_1\Theta^2 - \dot{w}_1\Theta + (2w_3 - \dot{w}_1 w_1 - 2w_1 w_2 + w_{1,x} - \dot{w}_2),$$

$$B_4 = \Theta^4 - 2w_{1,x}\Theta - (2w_{1,x}w_1 + 2w_{2,x})$$

がわかる。ここで $\dot{w}_1 = \dot{\Theta} w_1$ 等である。(8) において $l=0$ の方程式を書いてやると，

$$\dot{\Theta}_1 W = -(B_1 W - W\Theta)$$

$$= -\{(\dot{w}_1 + w_2 - w_2)\Theta^{-1} + (\dot{w}_2 - 2w_3 + 2w_1 w_2)\Theta^{-2} + \cdots\}.$$

これの $\Theta^{-1}$，$\Theta^{-2}$ の係数を比べて，

$$\dot{\Theta}_1 w_1 = -\dot{w}_1 , \quad \dot{\Theta}_1 w_2 = -(\dot{w}_2 + 2w_1w_2 - 2w_3) ,$$

等々の方程式が得られる。$2l=2$ の (8) は $\partial_x$ と $-\partial_{t_2}$ が同等ということを示している。これは $\Gamma^2 = -\Lambda^2$ から当然のことであった。また (8) において $2l=4$ の方程式の $\Theta^{-1}$, $\Theta^{-2}$ の係数を比べると

$$\dot{\Theta}_4 w_1 = w_{1,xx} + 2w_{3,x} - 2w_{1,x}\dot{w}_1 - 2w_{1,x}w_2 - 2w_{2,x}w_1 ,$$

$$\dot{\Theta}_4 w_2 = w_{2,xx} + 4w_{4,x} - 2w_{1,x}\dot{w}_2 + 2w_{1,x}w_3 - 2w_{1,x}w_1w_2 - 2w_{2,x}w_2$$

となる。第2式の肉体部分をとり、$w_4 = 0$ とする（2-切断を行う）と $f = \epsilon(w_2)$ とおいて $f_{t_4} = f_{xx} - 2ff_x$ と Burgers-Hopf 方程式が出る。第1式は全体が odd 故、肉体部分をとると自明になってしまう。

次に最も簡単な場合に解の表示を与えよう。$N=3$, $m=2$ の super Grassmann 方程式を考える。

$$\Phi = \exp\left[ s\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}^2 + s_1\begin{bmatrix} & -1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} & -1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}^2 \right]$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ & \bar{p}_0 & \bar{p}_1 \\ & & p_0 \end{bmatrix}$$

となる。ここで $p_0 = \bar{p}_0 = 1$, $p_1 = s + s_1$, $\bar{p}_1 = s - s_1$, $p_2 = x - t_2 + ss_1$ である。Superframe を $\Xi = (\xi_{ij})_{\substack{0\le i<3 \\ 0\le j<2}}$, $\xi_{ij} \in A_{|i+j|}$ として方程式を書くと,

$$(w_2, w_1)A = -(\alpha, \beta) \qquad (10)$$

となる。ただし,

$$
\begin{cases}
A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0\xi_{00} + p_1\xi_{10} + p_2\xi_{20} & p_0\xi_{01} + p_1\xi_{11} + p_2\xi_{21} \\ \bar{p}_0\xi_{10} + \bar{p}_1\xi_{20} & \bar{p}_0\xi_{11} + \bar{p}_1\xi_{21} \end{bmatrix}, \\
(\alpha, \beta) = (p_0\xi_{20}, p_0\xi_{21})
\end{cases}
$$

である。ここで $\epsilon(A)$ は可逆であるから，(10) は一意的に解ける。つまり $\epsilon(A)$ が可逆であることから $A$ が可逆であることが従い，$(w_2, w_1) = -(\alpha, \beta)A^{-1}$ として解が求まるわけであるがそれをもう少しくわしく説明しよう。

まず $\epsilon(a)$, $\epsilon(d)$ がゼロでないから，$a, d$ は可逆であることに注意する。そこで

$$(w_2, w_1)A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix} = -(\alpha, \beta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}$$

として，これより

$$w_2 = -\frac{\alpha - \beta d^{-1}c}{a - bd^{-1}c} \qquad (\epsilon(a - bd^{-1}c) = \epsilon(a) \neq 0)。$$

同様に右から $\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ をかけて

$$w_1 = -\frac{\beta - \alpha a^{-1}b}{d - ca^{-1}b} \qquad (\epsilon(d - ca^{-1}b) = \epsilon(d) \neq 0)$$

が出る。このままでもよいのだが，

$$w_2 = -\frac{\dfrac{\alpha d - \beta c}{d^2}}{\dfrac{ad - bc}{d^2}}, \qquad w_1 = -\frac{\dfrac{\beta a - \alpha b}{a^2}}{\dfrac{da - cb}{a^2}}$$

と書いておく。これらの分母は $A$ の "superdeterminant" と呼ばれるものである。(Manin, Leites などソ連の人は "Berezinian" といい $\mathrm{Ber}\, A$ と書いて譲らない。)

7.

$$s\det A = \frac{ad-bc}{d^2}, \quad s^{-1}\det A = \frac{da-cb}{a^2}\text{。}$$

$s\det A \cdot s^{-1}\det A = 1$ であることは、今の場合、簡単にチェックできる。さてここで $\Phi$ の形より、

$$\begin{cases} \dot{\textcircled{H}}_1 a = -c \\ \dot{\textcircled{H}}_1 b = -d \\ \dot{\textcircled{H}}_1 c = \alpha \\ \dot{\textcircled{H}}_1 d = \beta \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{\textcircled{H}}_2 a = -\alpha \\ \dot{\textcircled{H}}_2 b = -\beta \\ \dot{\textcircled{H}}_2 c = 0 \\ \dot{\textcircled{H}}_2 d = 0 \end{cases}$$

に注意すると、

$$\dot{\textcircled{H}}_1 (s^{-1}\det A) = \frac{\beta a - \alpha b}{a^2},$$
$$\dot{\textcircled{H}}_2 (s\det A) = \frac{-\alpha d + \beta c}{d^2}$$

であるから結局、

$$w_2 = \frac{\dot{\textcircled{H}}_2 (s\det A)}{s\det A}, \quad w_1 = -\frac{\dot{\textcircled{H}}_1 (s^{-1}\det A)}{s^{-1}\det A}$$

というきれいな表示が得られた。ここに現われる $s\det A$, $s^{-1}\det A$ は super Grassmann hierarchy, SKP hierarchy における"$\tau$-函数"にあたるものである。これに関しては、現在、計算（実験）が進行中のことでもあり結果をまとめるのは、時期尚早と思われるのでここでは割愛する。

なお KP hierarchy の超対称化は我々とは別の定式化が Manin と Radul により試みられていることを注意しておく（[4]）。

## 文献


0) M. Sato：数研講究録 439 (1981), 30−46.

1) M. Sato and Y. Sato：Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 5 (1982), 259−271.

2) A. Rogers：J. Math. Phys. 21 (1980), 1352−1365.

3) S. Boyer and C. P. Gitler：Trans. AMS. 285 (1984), 241−267.

4) Yu. I. Manin and A. O. Radul：Commun. Math. Phys. 98 (1985), 65−77.

5) 数学のあゆみ 28号 (1985).


1986年5月5日 記.